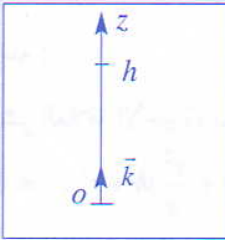


## تمرين 1 سقوط جسمين من نفس الموضع



نهمل الاحتكاكات ونأخذ  $g = 9,8m.s^{-2}$

نحرر جسما ( $S_1$ ) من ارتفاع  $h$  عن سطح الأرض بدون سرعة بدئية عند لحظة  $t = 0$  وبعد ثانيتين،  
نحرر جسما آخر ( $S_2$ ) في نفس الظروف السابقة، من نفس الموضع، وبدون سرعة بدئية.  
ما هي المسافة التي تفصل بين الجسمين بعد مرور  $4s$  عن تحرير الجسم ( $S_1$ )؟

## حل

أصل معلم الفضاء : النقطة  $O$  الموجودة على سطح الأرض.

أصل معلم الزمان : لحظة تحرير الجسم .

المعلم المستعمل : ( $O, \bar{k}$ ) محوره  $Oz$  موجه نحو الأعلى.

باعتبار أن السقوط حر، تكتب المعادلات الزمنية لحركة ( $S_1$ ) كالتالي :

$$a_1 = -g ; v_1 = -g.t ; z_1 = -\frac{1}{2}g.t^2 + h$$

المعادلات الزمنية لحركة ( $S_2$ ) .

$$a_2 = -g ; v_2 = -g(t-2) ; z_2 = -\frac{1}{2}g(t-2)^2 + h$$

$t' = t - 2$  لأن ( $S_2$ ) حرر بعد مرور  $2s$  على تحرير ( $S_1$ ) .

المسافة الفاصلة بين الجسمين ( $S_1$ ) و ( $S_2$ ) هي :  $d = z_2 - z_1$  لأن :  $z_2 > z_1$

$$\text{أي أن : } d = -\frac{1}{2}g(t^2 - 4t + 4) + h + \frac{1}{2}gt^2 - h$$

$$\text{يعني : } d = -\frac{1}{2}gt^2 + 2gt - 2g + h + \frac{1}{2}gt^2 - h$$

$$\text{إذن : } d = 2g(t-1)$$

بعد مرور  $t = 4s$  تكون المسافة الفاصلة بين موضعين الجسمين هي :  $d = 2 \cdot 9,8 \cdot (4-1) = 58,8m$

## تمرين 2 قياس عمق بئر

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ  $g = 9,8m.s^{-2}$

لمعرفة عمق بئر، نحرق جسما بدون سرعة بدئية، عند اللحظة  $t = 0$ ، ليسقط داخل البئر، ونقيس المدة الزمنية  $t$  الفاصلة بين

بداية السقوط ولحظة سماع اصطدام الجسم بالماء.

أعطى هذا القياس، بالنسبة لبئر،  $t = 5s$ .

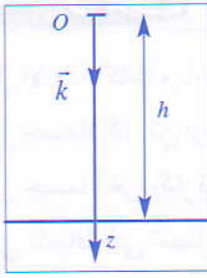
احسب العمق  $h$  للبئر، علما أن سرعة انتشار الصوت في الهواء هي :  $v = 330m.s^{-1}$  وأن :  $h < 200m$ .

## حل

باعتبار النقطة  $O$  التي تنتمي إلى سطح الأرض، أصلا لمعلم الفضاء ( $O, \bar{k}$ ) محوره  $Oz$  موجه نحو الأسفل، ولحظة تحرير الجسم

انطلاقا من النقطة  $O$ ، أصلا للتواريخ، تكتب المعادلات الزمنية لحركة الجسم كالتالي :  $z = \frac{1}{2}gt^2$  ;  $v_z = gt$  ;  $a_z = g$

يصطدم الجسم بالماء عند اللحظة  $t_1$  وذلك بعد قطع المسافة  $h$  التي تمثل عمق البئر، ومنه :  $h = \frac{1}{2}g.t_1^2$



يستغرق الصوت، ليصل إلى أذن المحرب، المدة  $t_2 = \frac{h}{v}$  مع  $t = t_1 + t_2$

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} g (t - t_2)^2 = \frac{1}{2} g (t - \frac{h}{v})^2$$

ومنه : بنشر العلاقة الأخيرة، نحصل على معادلة من الدرجة الثانية على شكل :

$$h^2 - 2,55 \cdot 10^4 h + 2,72 \cdot 10^6 = 0 \quad \text{أي} \quad h^2 - 2(t \cdot v + \frac{v^2}{g})h + t^2 \cdot v^2 = 0$$

بحل هذه المعادلة نجد أن :  $m101 = h$

### تمرين 3

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

عند اللحظة  $t = 0$ ، نرسل كرية  $(b_1)$  رأسياً نحو الأعلى بسرعة  $v_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$ ، انطلاقاً من نقطة  $O$ ، أصل المعلم الرأسى  $(O, \bar{k})$

تصعد الكرية  $(b_1)$  رأسياً وفق المحور  $(Oz)$  إلى أن تصل إلى أعلى نقطة  $H$  (انظر الشكل جانبه)

1- اكتب المعادلة الزمنية  $z_1(t)$  لحركة  $(b_1)$ ، واحسب المدة الزمنية  $t_H$  المستغرقة خلال الصعود.

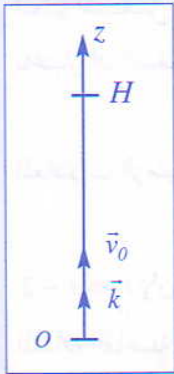
2- احسب الارتفاع الأقصى الذي تصل إليه الكرية  $(b_1)$ .

3- عند اللحظة  $t = 1 \text{ s}$ ، نرسل كرية  $(b_2)$  في نفس الظروف انطلاقاً من الأصل  $O$  وب نفس السرعة  $\bar{v}_0$ ؛

أوجد المعادلة الزمنية  $z_2(t)$  لحركة  $(b_2)$  باختيار أصل التواريخ  $(t = 0 \text{ s})$  لحظة إرسال الكرية  $(b_1)$ .

4- عند اللحظة  $t_C$  تلتقي الكريتان  $(b_1)$  و  $(b_2)$  في نقطة  $C$  من المحور  $Oz$ .

حدد اللحظة  $t_C$  والأنسوب  $z_C$  للنقطة  $C$ .



### حل

1- المعادلات الزمنية لحركة  $(b_1)$  ومدة الصعود

باعتبار أن السقوط حر، تكتب المعادلات الزمنية لحركة الكرية  $(b_1)$  في المعلم  $(O, \bar{k})$  كالتالي :

$$a_1 = -g \quad ; \quad v_1 = -g \cdot t + v_0 \quad ; \quad z_1 = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 t$$

$$z_1(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 t = -5t^2 + 8t$$

- المعادلة الزمنية  $z_1(t)$

- مدة الصعود

- عند النقطة  $H$  تنعدم سرعة الكرية  $(b_1)$  ومنه :  $v_1 = -10t_H + 8 = 0$  إذن :  $t_H = 0,8 \text{ s}$

2- حساب الارتفاع الأقصى

الارتفاع الأقصى هو المسافة  $h$  المقطوعة من طرف الكرية  $(b_1)$ .

تتوقف الكرية عند النقطة  $H$ ، إذن الارتفاع الأقصى هو  $z_H = h = OH$

$$h = -5t_H^2 + 8t_H = -5(0,8)^2 + 8(0,8) = 3,2 \text{ m}$$

ومنه :

3- المعادلات الزمنية لحركة  $(b_2)$  في المعلم  $(O, \bar{k})$

$$a_2 = -g \quad , \quad v_2 = -g(t-1) + v_0 \quad , \quad z_2 = -\frac{1}{2} g(t-1)^2 + v_0(t-1)$$

- لأن الكرية  $(b_2)$  أرسلت بعد مرور  $1 \text{ s}$  على إرسال  $(b_1)$ .

المعادلة الزمنية  $z_2(t)$

$$z_2(t) = -5(t-1)^2 + 8(t-1) = -5t^2 + 18t - 13$$

4 - لحظة التقاء الكرتين والأنسوب الموافق

عند التقاء الكرتين يكون  $z_1 = z_2$

يعني :  $-5t_C^2 + 8t_C = -5t_C^2 + 18t_C - 13$  ومنه :  $t_C = 1,3s$

موضع التقاء الكرتين معلم بالأنسوب  $z_C$  ، حيث  $z_C = z_1 = z_2$

أي أن :  $z_C = -5t_C^2 + 8t_C = -5(1,3)^2 + 8(1,3) = 1,95m$

### تمرين 4 السقوط الحر بسرعة بدئية

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ  $g = 10m.s^{-2}$

يرسل لاعب كرة كتلتها  $m$  من نقطة  $O$  رأسيا نحو الأعلى بسرعة بدئية  $\vec{v}_0$ .

يصل مركز قصور الكرة إلى ارتفاع أقصى  $h = 5m$  فوق النقطة  $O$  ثم ينزل.

1- أثبت المعادلة التفاضلية للحركة.

2- أوجد حل هذه المعادلة التفاضلية وبين أن حركة  $G$  تشمل طورا لل صعود وطورا للنزول.

3- حدد تعبير المعادلة الزمنية  $OG = z = f(t)$

4- احسب قيمة السرعة البدئية  $v_0$ .

5- في أية لحظة يمر مركز قصور الكرة من جديد من النقطة  $O$ .

### حل

1- إثبات المعادلة التفاضلية لحركة الكرة

تخضع الكرة أثناء حركتها في المرجع الأرضي إلى :

$\vec{P}$  : وزنها

قوة الاحتكاك ودافعة أرخميدس مهملتان أمام الوزن  $\vec{P}$ .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة، نكتب :  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g} = m.\vec{a}_G = m \frac{d\vec{v}_G}{dt}$

نسقط هذه العلاقة على المحور  $Oz$  الموجه نحو الأعلى :

المعادلة التفاضلية للحركة هي :  $a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g$

2- حل المعادلة التفاضلية

الشروط البدئية :  $v_{oz} = v_0$  و  $z_0 = 0$  إذن :  $v_z = -g.t + v_0$

إذا كانت  $t < \frac{v_0}{g}$  ، تكون  $v_z > 0$  ، أي أن الكرة في حالة صعود ؛

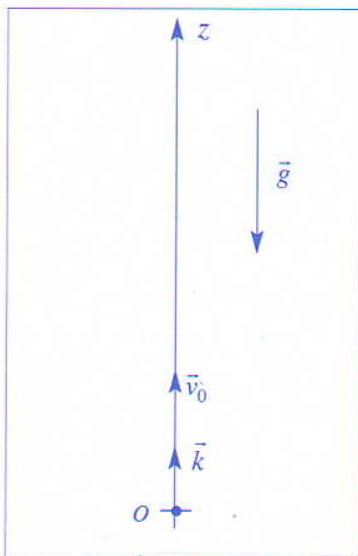
إذا كانت  $t > \frac{v_0}{g}$  ، تكون  $v_z < 0$  ، أي أن الكرة في نزول.

إذن، تشمل الحركة طورين وهما طور الصعود وطور النزول.

3- تعبير المعادلة الزمنية

حسب التعريف،  $v_z = \frac{dz}{dt}$  ، إذن  $z$  هي دالة أصل لـ  $v_z = -g.t + v_{oz}$

ومنه :  $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{g}$



إذن لدينا :  $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t + z_0$  أو  $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t$  (لأن  $z_0 = 0$ )

4 - حساب  $v_0$

يصل مركز قصور الكرة إلى الارتفاع الأقصى  $h$  عند لحظة انعدام سرعته أي :  $v_z = 0$  ومنه :  $t = \frac{v_0}{g}$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{أي أن} \quad z = h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g}$$

$$v_0 = \sqrt{2.g.h} = \sqrt{2.10.5} = 10m.s^{-1} \quad \text{ومنه :}$$

5 - تحديد لحظة مرور الكرة من النقطة  $O$

عندما يمر مركز قصور الكرة من النقطة  $O$  ، لدينا :  $z = 0$

$$O = 5.t^2 + 10.t \quad \text{ومنه :}$$

$$O = t.(-5t + 10) \quad \text{أو}$$

نستنتج أن مركز قصور الكرة يمر من جديد من النقطة  $O$  عند اللحظة :  $t = \frac{10}{5} = 2s$  ؛

علما أنه أرسل من النقطة  $O$  ، عند  $t = 0$ .